E. N. S. I. M 1975

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

P désignant un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$, d'axes Ox, Oy, soit T une application d'un ouvert D de P dans P, associant à tout point m de D, de coordonnées x, y, le point $M = T(m)$ de coordonnées :

$$X = U(x, y) \quad ; \quad Y = W(x, y)$$

On dira que l'application T appartient à la classe $\mathcal{H}_D$ si les fonctions U et W définissant $T(m)$ ont les propriétés suivantes :

H_1 : Chacune des deux fonctions U et W est pourvue de dérivées partielles d'ordres 1 et 2 continues dans D, les dérivées partielles d'ordre 1 n'étant nulles simultanément en aucun point de D;

H_2 : les deux fonctions U et W satisfont en tout point de D aux conditions :

$$U'_x = W'_y \quad ; \quad U'_y = - W'_x$$

1° Dans l'intervalle de temps $[a, b]$, un point m de l'ouvert D effectue un mouvement décrit par l'équation vectorielle :

$$\overline{Om} = \gamma(t) \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

où γ est une fonction vectorielle définie, continue et différentiable sur $[a, b]$. On désigne par (γ) la trajectoire de m.

Soit M l'image du point mobile m par une application $T \in \mathcal{H}_D$ définie par deux fonctions U et W ayant les propriétés H_1 et H_2. On désigne par (Γ) sa trajectoire. De quelle nature est-elle?

Montrer que la connaissance de la seule fonction U permet d'exprimer les composantes V_x et V_y de la vitesse $\vec{V}$ du point M à un instant quel-

conque en fonction des coordonnées du point m et des composantes v_x et v_y de sa vitesse $\vec{v}$ au même instant. Calculer l'angle θ des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{V}$ en fonction des coordonnées x, y de m.

2° (γ) désignant un arc différentiable dans D passant par m, (Γ) son image par T passant par $M = T(m)$, montrer que l'on passe du vecteur tangent en m à (γ) au vecteur tangent en M à (Γ) par un endomorphisme que l'on précisera.

(γ_1) et (γ_2) étant deux arcs différentiables passant par m, (Γ_1) et (Γ_2) leurs images par T, trouver la relation liant l'angle α des demi-tangentes positives à (γ_1) et (γ_2) au point m, et l'angle β des demi-tangentes positives à (Γ_1) et (Γ_2) au point $M = T(m)$.

II

1° A tout réel λ, on associe la fonction :

$$x \longrightarrow F_\lambda(x) = \text{Arg ch } \frac{\lambda}{\cos x}$$

Étudier pour $\lambda > 0$, la partie E_λ de l'ensemble de définition incluse dans $]0, \pi[$ (on discutera suivant la valeur de λ); étudier, dans les différents cas, les variations de $F_\lambda(x)$ lorsque x parcourt E_λ. Comment la représentation graphique de $F_{-\lambda}$ peut-elle se déduire de celle de F_λ ?

Effectuer la même étude pour la fonction :

$$x \longrightarrow G_\mu(x) = \text{Arg sh } \frac{\mu}{\sin x}$$

Donner l'allure des représentations graphiques de F_λ et G_μ, x parcourant l'intervalle $]-\pi, +\pi[$, pour $\mu \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 1$, $\lambda = 1$, $\lambda \leqslant 1$.

2° Dans cette question et dans la suivante, A représente l'ensemble des points m du plan, de coordonnées (x, y), tels que $x \in]0, \pi[$ et A' l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $x \in]0, \pi[$.

Soit f l'application de A' dans $\mathbf{C}$ définie par :

$$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \forall z = x + iy \in A'$$

Calculer en fonction de x et y les parties réelle $U(x, y)$ et imaginaire $W(x, y)$ de $f(z)$. Vérifier que la transformation T associée aux fonctions U et W ainsi définies dans A appartient à la classe $\mathcal{HC}_A$.

3° Trouver pour $\lambda > 0$, l'ensemble (C_λ) des points de A dont l'image par T a pour abscisse λ.

Trouver de même, pour $\mu > 0$, l'ensemble (C'_μ) des points de A dont l'image par T a pour ordonnée μ. Vérifier que, quels que soient λ et μ réels > 0, (C_λ) a un point commun et un seul avec (C'_μ) et que les deux arcs se coupent orthogonalement en ce point.

4° Plus généralement, D étant un ouvert de P, soit T une application de D dans P appartenant à la classe $\mathcal{HC}_D$, définie par deux fonctions U et W ayant les propriétés H_1 et H_2 ; λ et μ étant deux réels donnés, on désigne par (C_λ) l'ensemble, supposé non vide, des points de D dont l'image par T a pour abscisse λ, et par (C'_μ) l'ensemble, supposé non vide, des points de D dont l'image par T a pour ordonnée μ.

Montrer que si (C_λ) et (C'_μ) sont deux arcs différentiables ayant un point commun, ils se coupent en ce point orthogonalement.

III

1° Soit U une fonction numérique définie dans un ouvert D de $\mathbf{R}^2$ ayant la propriété H_1 énoncée dans la partie I et telle que :

$$U''_{x^2} + U''_{y^2} = 0 \qquad \forall (x, y) \in D$$

Les notations étant celles du I, montrer qu'il existe une infinité de fonctions numériques W, ayant également la propriété H_1 dans D, et définissant avec U une transformation $T \in \mathcal{HC}_D$; W_1 et W_2 désignant deux fonctions de ce type, que dire de la différence $W_2 - W_1$? Que dire des transformations T_1 et T_2 correspondantes?

2° Soit φ une fonction de la variable réelle r définie et pourvue d'une dérivée seconde continue sur $]0, +\infty[$.

A quelle condition doit-elle satisfaire pour que la fonction U définie par :

$$U(x, y) = x\,\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad \forall\,(x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

vérifie la relation :

$$U''_{x^2} + U''_{y^2} = 0$$

en tout point de son ensemble de définition?

Trouver toutes les transformations $T \in \mathcal{H}_{P-\{0\}}$ définies par deux fonctions U et W telles que U (x, y) soit de la forme :

$$U(x, y) = x\,\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Préciser celle de ces transformations qui admet pour point double le point de coordonnées (1 , 0) et donne pour image au point de coordonnées (0 , 1) le point O.

Dans ce cas particulier, exprimer $U(x, y) + i\,W(x, y)$ en fonction de $z = x + iy$. Si l'on pose

$$U(x, y) + i\,W(x, y) = f(z),$$

montrer que, pour tout $z \neq 0$, le rapport

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad (h = h_1 + i\,h_2 \in \mathbf{C})$$

tend vers une limite finie lorsque h tend vers 0, limite que l'on calculera.

3° Plus généralement, U et W désignant deux fonctions jouissant dans un domaine D des propriétés H_1 et H_2 énoncées dans la partie I, on pose :

$$x + iy = z \quad \text{et} \quad U(x, y) + i\,W(x, y) = f(z)$$

Montrer que pour tout z tel que $(x, y) \in D$, le rapport :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad (h = h_1 + i\,h_2 \in \mathbf{C})$$

tend vers une limite finie lorsque h tend vers 0, limite que l'on peut calculer connaissant uniquement la fonction U.

IV

1° Soit g la fonction des deux variables r et φ définie par :

$$\forall\,(r\,\varphi) \in]0, \infty[\times]-\pi, \pi], \quad g(r, \varphi) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi.$$

ρ et θ étant deux nombres réels donnés tels que $\rho > 0$, $\theta \in]-\pi, \pi]$, calculer l'intégrale :

$$I(r, \rho, \theta) = \frac{r^2-\rho^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(r, \varphi)}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi$$

(On pourra poser $\varphi - \theta = \alpha$). Discuter suivant la valeur de r.

Calculer les limites suivantes :

$$G_1(\rho, \theta) = \lim_{r\to\infty} I(r, \rho, \theta) \quad ; \quad G_2(\rho, \theta) = \lim_{r\to 0} I(r, \rho, \theta)$$

2° Soit G la fonction définie par :

$$\forall\,(\rho, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi], \quad G(\rho, \theta) = G_1(\rho, \theta) - G_2(\rho, \theta)$$

Trouver la fonction F des deux variables ρ et θ, définie et pourvue de dérivées partielles continues dans $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi]$, telle que

$$\rho\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{\partial G}{\partial \theta} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = \rho\frac{\partial G}{\partial \rho} \quad ; \quad F(\rho, 0) = 0, \quad \forall\,\rho > 0$$

3° Vérifier que l'application T de $P - \{0\}$ dans P associant au point $m \in P - \{0\}$ de coordonnées $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, $(\rho > 0)$, le point M $\in$ P de coordonnées $(G(\rho, \theta), F(\rho, \theta))$, n'est autre que l'application étudiée au III, 3°.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail